

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES
Option économique

Mardi 15 mai 2001, de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} , rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E , défini par :

$f_a(e_2) = 0$ et $f_a(e_1) = f_a(e_3) = a e_1 + e_2 - a e_3$.

- 1) a. Écrire la matrice A_a de f_a relativement à la base \mathcal{B} et calculer A_a^2 .
 - b. Montrer que 0 est la seule valeur propre de A_a .
 - c. A_a est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
- 2) On pose $u_1 = a e_1 + e_2 - a e_3$.
 - a. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

- b. Vérifier que la matrice de f_a relativement à la base \mathcal{B}' est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

3) On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans \mathcal{B}' .

a. Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.

b. Dédurre de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.

4) Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans \mathcal{B}' est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1, P_2 et P_3 . On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1) a. Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.

c. En déduire l'espérance de X , notée $E(X)$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$.

2) a. On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x, y)$.

b. Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .

b. En déduire que le seul point en lesquels les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

4) a. Démontrer que f présente un minimum local au point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

b. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0. \\ f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f .

2) a. Déterminer la fonction de répartition F de X .

b. Calculer la médiane de X , c'est-à-dire le réel μ tel que $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.

3) On appelle mode de la variable aléatoire X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o , et le déterminer.

4) a. En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X a une espérance

et montrer que $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de X .

Problème

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$;

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante,

valable pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1) a. Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2) a. Pour tout k de \mathbb{N} , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3) a. À l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

b. En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

c. En déduire finalement que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Partie 3

1) Écrire un programme en Turbo Pascal permettant de calculer et d'afficher u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.

2) a. Écrire un deuxième programme, toujours en Turbo Pascal, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.

b. On donne : $\ln 2 \leq 0,70$ et $\ln 5 \leq 1,61$. En déduire un majorant de $\ln 5000$.

c. Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.